]headings
empty

5 Reelle Funktionen

[Definition]Die relle FunktionEine Funktion $f : D \to Z$ mit $D, Z \subseteq R$ heisst **reelle** oder **reellwertige Funktion** .

[Definition]c-Stelle und NullstelleSei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion. Man nennt die Stelle $x \in D$ mit $f(x) = c$ eine

[Definition]Der natrliche Definitions- und WertebereichDer **natrliche Definitionsbereich** D_f einer reellen Funkti

Der **natrliche Wertebereich** ist $W_f = f(D_f)$ 5 Reelle Funktionen

[Satz]Der Graph der UmkehrfunktionIst f eine bijektive Funktion, dann entspricht der Graph der Umkehrfunktion

[Definition]Affin-lineare FunktionEine Funktion mit Abbildungsvorschrift

[Definition]Stetigkeit an einer inneren StelleSei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion. Zudem sei $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 +$
Die Funktion f heisst **stetig** *an der Stelle x_0 oder stetig in x_0 , wenn*

Ist f nicht stetig in x_0 , heisst f unstetig in x_0 . Man nennt dann x_0 auch eine Unstetigkeitsstelle der Funktion. 5 Ree
[Definition]Stetigkeit auf IntervallenEs sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion, $a, b \in R$ mit $a < b$.
Die Funktion f heisst stetig auf einem offenen Intervall $I \subseteq D$ der Form $I = (a, b)$, $I = (-\infty, b)$ oder $I = (a, +\infty)$
[Definition]Stckweise stetige FunktionSei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion. Hat f endlich viele Unstetigkeitsstellen, s
[Satz]Katalog stetiger FunktionenFolgende Funktionen sind auf ihrem natrlichen Definitionsbereich stetig:

- *Polynome (insbesondere affin-lineare Funktionen),*
- *rationale Funktionen,*
- *Potenzfunktionen,*
- *Exponentialfunktionen,*
- *Logarithmusfunktionen,*
- *Sinus- und Kosinusfunktion,*
- *Betragsfunktion. 5 Reelle Funktionen*

[Satz]Stetigkeitseigenschaften der Auf- und AbrundungsfunktionDie Auf- und die Abrundungsfunktionen, $\lceil x \rceil$ und
[Satz]Verknpfungen stetiger FunktionenSind die beiden reellen Funktionen $f : D \to Z_1$ und $g : D \to Z_2$ stetig, so gi

- *$f + g, f - g, f \cdot g, \max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ sind stetig auf D ,*
- *$\left(\frac{f}{g}\right)$ ist stetig auf $\{x \in D | g(x) \neq 0\}$ 5 Reelle Funktionen*

[Satz]Die Umkehrfunktion einer stetigen FunktionIst $f : I \to Z$ eine bijektive, stetige, reelle Funktion und I ein Int
[Satz]Stetigkeit der KompositionSeien $g : D_1 \to Z_1$ und $f : D_2 \to Z_2$ zwei stetige reelle Funktionen mit $g(D_1) \subseteq D_2$
Sind f und g stetig, so ist die Komposition $f \circ g : D_1 \to Z_2$ stetig. 5 Reelle Funktionen
[Satz]ZwischenwertsatzIst fr $a, b \in R$ die reelle Funktion $f : [a, b] \to Z$ stetig, so nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$
Mathematisch:

5 Reelle Funktionen
[Satz]NullstellensatzIst fr $a, b \in R$ die Funktion $f : [a, b] \to$ stetig, $\min\{f(a), f(b)\} < 0$ und $\max\{f(a), f(b)\} > 0$, s
[Definition]Der DifferenzenquotientEs sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion und $x_0, x_0 + \Delta x \in D$, wobei $\Delta x \neq 0$. Mi

Differenzenquotient *von f an der Stelle x_0 . 5 Reelle Funktionen*
[Definition]Der Differentialquotient und DifferenzierbarkeitDie reelle Funktion $f : D \to Z$ heisst **differenzierbar** *a*

existiert. Der Grenzwert $f'(x_0)$ heisst **(erste) Ableitung, Differentialquotient** *oder* **Steigung** *von f an der Stelle*
[Definition]Die TangenteIst die reelle Funktion $f : D \to Z$ an der inneren Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, so heisst die

Vereinfachend bezeichnet man auch die Abbildungsvorschrift t_{x_0} als die Tangente an f an der Stelle x_0 . 5 Reelle Funk
[Definition]Aus Differenzierbarkeit folgt StetigkeitIst eine reelle Funktion $f : D \to Z$ differenzierbar in $x_0 \in D$, so i
[Satz]Die Ableitung der Umkehrfunktion (=Umkehrsatz)Sei $f : D \to Z$ eine bijektive reelle Funktion. Ferner sei f

5 Reelle Funktionen
[Satz]Wichtige AbleitungenSei f eine reelle Funktion mit ihrem natrlichen Definitions- und Wertebereich und Abbi

- *$f(x) = c, c \in R$, dann ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$*
- *$f(x) = x^r$, dann ist f fr alle $r \in R, x \in D_f$, fr welche x^{r-1} definiert ist, differenzierbar und es gilt $f'(x) = r \cdot$*
- *$f(x) = ln(x)$, dann ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = \frac{1}{x}$*
- *$f(x) = e^x$, dann ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = e^x$*
- *$f(x) = \sin(x)$, dann ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = \cos(x)$*
- *$f(x) = \cos(x)$, dann ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = -\sin(x)$ 5 Reelle Funktionen*

[Definition]Rechenregeln fr AbleitungenSind $f : D \to Z$ und $g : D \to Z$ reelle Funktionen, die an einer Stelle $x_0 \in D$

- *$(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$* **(Summenregel)** *,*
- *$(f(x_0) - g(x_0))' = f'(x_0) - g'(x_0)$* **(Differenzenregel)** *,*
- *$(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$* **(Produktregel)** *,*
- *$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$* **(Quotientenregel)** *. 5 Reelle Funktionen*

[Satz]KettenregelIst die reelle Funktion $g : D_1 \to Z_1$ an der Stelle $x_0 \in D_1$ differenzierbar und $f : D_2 \to Z_2$ an der

5 Reelle Funktionen
[Definition]Stetig differenzierbare FunktionSei $n \in N$. Eine reelle Funktion $f : D \to Z$ heisst **n-mal differenzierb**
Ist f eine reelle Funktion, welche n-mal (stetig) differenzierbar fr alle $x \in D$ ist, so heisst f kurz n-mal (stetig) diffe
[Satz]Mittelwertsatz der DifferentialrechnungFr $a, b \in R, a < b$ sei die reelle Funktion $f : D \to Z$ auf dem Intervall
Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$, so dass