DEFINITION

*Die Folge*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

DEFINITION

*Eigenschaften von Folgen*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

DEFINITION

*Die Reihe*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

DEFINITION

*Der Grenzwert einer Folge und Konvergenz*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heisst
- **streng monoton steigend** (oder wachsend), wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **monoton steigend** (oder wachsend), wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **monoton fallend** , wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **streng monoton fallend** , wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **(streng) monoton** , wenn sie (streng) monoton steigend oder (streng) monoton fallend ist. • **beschränkt** , wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Eine (unendliche) Zahlenfolge, kurz **Folge** , ist eine Funktion $f\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ , die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Element $a_n = f(n)$ aus $\mathbb{R}$ zuordnet. Man schreibt auch $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ für die Folge und bezeichnet $a_n = f(n)$ als $n$ -tes Glied der Folge.

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen einen (eigentlichen) **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jeder beliebigen Zahl $\epsilon > 0$ eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $a_n$ mit $n > m$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Man schreibt

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_n, \quad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \quad \text{oder} \quad a_n \to \text{ für } +\infty$$

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heisst **konvergent** .
Folgen, die nicht konvergent sind, heissen **divergent** .

Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Zahlenfolge, so heisst die Zahlenfolge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ **(unendliche) Reihe** .
Man schreibt auch $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}_{n_i n \mathbb{N}}$ .
Die Glieder $s_n$ der Reihe nennt man auch **Partialsummen** der Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ .

DEFINITION

*Uneigentliche Grenzwerte*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

SATZ

*Beschränktheit konvergenter Folgen*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

SATZ

*Konvergenz monotoner und beschränkter Folgen*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

SATZ

*Der Vergleichssatz für konvergente Folgen*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

Ist eine Folge konvergent, so ist sie auch beschränkt.

Eine divergente Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den **uneigentlichen Grenzwert** $+\infty$, wenn für grosse $n$ alle Folgenglieder jeden beliebigen Wert $a \in \mathbb{R}$ übersteigen, also wenn man zu jedem Wert $a$ eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ angeben kann, so dass alle Folgenglieder mit Index $n > m$ grösser als $a$ sind.
Kurz: Man schreibt $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, wenn

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{R} : a_n > a \text{ für alle } n > m$$

Analog schreibt man $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, wenn

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{R} : a_n < a \text{ für alle } n > m$$

Es seien $m \in \mathbb{R}$ und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ und $a_n \le b_n$ für alle $n \ge m$.
Dann gilt $a \le b$.

Ist eine Folge monoton und beschränkt, so ist sie konvergent.

SATZ

*Der Vergleichssatz zur Grenzwertbestimmung (Quetschsatz)*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

SATZ

*Der Vergleichssatz für uneigentliche Grenzwerte*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

SATZ

*Rechenregeln für konvergente Folgen*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

SATZ

*Rechenregeln für Quotienten, deren Nenner sich 0 nähert*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

Es seien $m \in \mathbb{R}$ und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen.
Gilt $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ und $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$ , dann gilt $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ .
Gilt $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ und $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$ , dann gilt $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ .

Es sei $m \in \mathbb{R}$ . Zudem seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit gleichem Grenzwert $a = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$ und $\{b_n\}_{\acute{n}\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \geq m$ .
Dann gilt $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$ .

Es sei $a_{n\,n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $0 = \lim_{n\to+\infty} a_n$ . Dann gilt:

- Existiert ein $m \in \mathbb{R}$ mit $a_n > 0$ für alle $n > m$ , dann gilt $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ ,
- Existiert ein $m \in \mathbb{R}$ mit $a_n < 0$ für alle $n > m$ , dann gilt $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$ ,
- Existiert kein $m \in \mathbb{R}$ mit $a_n > 0$ für alle $n > m$ oder $a_n < 0$ für alle $n > m$ , so hat die Folge $\{\frac{1}{a_n}\}$ keinen uneigentlichen Grenzwert.

Es seien $a_{n\,m\in\mathbb{N}}$ und $b_{n\,n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\to+\infty} a_n, b = \lim_{n\to+\infty} b_n$ und $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + b$ ,
- $\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = a - b$ ,
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ , wenn $b_n \neq 0$ für alle $n$ und $b \neq 0$
- $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^c = a^c$ , wenn $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$ ,
- $\lim_{n\to+\infty} (c)^{a_n} = c^a$ , wenn $c > 0$ ,

SATZ

*Rechenregeln für Quotienten und Produkte mit uneigentlichen Grenzwerten*



DEFINITION

*Die arithmetische Folge*



SATZ

*Konvergenzverhalten der arithmetischen Folge und Reihe*



DEFINITION

*Die geometrische Folge*

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **arithmetische Folge** , wenn die Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder konstant ist, also $a\_n+1-a_n=d$ für alle $n\in\mathbb{N}$ .

Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ , $\{b_n\}_{n\in\acute{\mathbb{N}}}$ , $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ , $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ , und $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$ , $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=+\infty$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=\lim\limits_{n\to+\infty} e_n=-\infty$ .
Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n+c_n)=+\infty$ ,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+d_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(d_n+e_n)=-\infty$ ,

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **geometrische Folge** , wenn der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder konstant aber nicht eins ist, also $\frac{a_n+1}{a}=q, q\neq 1, a_1\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ .

Für die arithmetische Folge $\{a_1+(n-1)\cdot d\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1, d\in\mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_1+(n-1)\cdot d)=\begin{cases}+\infty & \text{für } d>0\\ a_1 & \text{für } d=0\\ -\infty & \text{für } d<0\end{cases}$$

Für die arithmetische Reihe $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_1+(i-1)\cdot d\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}(a_1+(i-1)\cdot d)=\begin{cases}+\infty & \text{für } d>0 \text{ oder } d=0, a_1>0\\ a_1 & \text{für } a_1=d=0\\ -\infty & \text{für } d<0 \text{ oder } d=0, a_1<0\end{cases}$$

SATZ

*Konvergenzverhalten der geometrischen Folge und Reihe*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

DEFINITION

*Die (allgemeine) harmonische Folge*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

SATZ

*Konvergenzverhalten der (allgemeinen) harmonischen Folge und Reihe.*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

SATZ

*Konvergenzverhalten der Folge zur eulerschen Zahl*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

Eine Folge $\frac{1}{n^c}{}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c > 0$ heisst **(allgemeine) harmonische Folge** .

Sei $a_1, q \in \mathbb{R}$ , $a_1 \neq 0, q \neq 1$ . Ist $|q| < 1$ , so konvergieren die geometrische Folge $\{a_1 \cdot q^{n-1}\}n \in \mathbb{N}$ und die geometrische Reihe $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot q^{i-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$\lim_{n\to+\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = 0$ und
$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot q^{i-1} = \lim_{n\to+\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$ .
Ist $|q| > 1$ oder $q = 1$ , so divergieren die geometrische Folge und die geometrische Reihe.
Ist $q > 1$ , besitzen die geometrische Folge und die geometrische Reihe einen uneigentlichen Grenzwert, dessen Vorzeichen durch $a_1$ bestimmt wird:

$$\lim_{n\to+\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & \text{für } q > 1 \text{ und } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{für } q > 1 \text{ und } a_1 < 0 \end{cases}$$

Die Folge $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und beschränkt und daher konvergent.

Für die allgemeine harmonische Folge $\left\{\frac{1}{n^c}\right\}$ mit $c > 0$ gilt

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^c} = 0$$

Die allgemeine harmonische Reihe $\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^c}\right\}$ ist konvergent wenn $c > 1$
.
Für $0 < c \leq 1$ ist die Reihe divergent und es gilt $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^c} = +\infty$ .

DEFINITION

*Die Eulersche Zahl e*

4 FOLGEN UND IHRE GRENZWERTE

Der Grenzwert $\lim\_n \to +\infty(1+\frac{1}{n})^n$ heisst **Eulersche Zahl** $e$ .