DEFINITION

Definition der Relation

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

DEFINITION

Die Umkehrrelation

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

SATZ

Die Umkehrrelation der Umkehrrelation

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

DEFINITION

Die Funktion

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

Sei $(D,Z,R), R \subseteq D \times Z$ eine (binäre) Relation zwischen D und Z .
Dann ist

$$(Z,D,R^{-1}) \text{ mit } R^{-1} = \{(y,x) \in Z \times D \mid (x,y) \in R\} \subseteq Z \times D$$

die **Umkehrrelation** oder **inverse Relation** von (D,Z,R) .
Sind D und Z eindeutig durch R^{-1} gegeben, nennt man auch $R-1$ selbst vereinfachend die Umkehrrelation von R

Ein Tupel dreier Mengen (D,Z,R) mit $R \subseteq D \times Z$ heisst **(binäre) Relation** zwischen der *Ursprungsmenge* D und der *Zielmenge* Z .
Für Tupel $(x,y) \in R \subseteq D \times Z$ sagt man auch *"x steht in Beziehung (Relation) zu y"* .
Statt $(x,y) \in R$ schreibt man auch xRy .
Die Menge R nennt man auch den *Graphen* der Relation.
Ergeben sich die Mengen D und Z direkt aus den Elementen von R , spricht man auch vereinfacht von der Relation R anstatt vom Graphen der Relation.

Eine Vorschrift, die jedem Element in der Ursprungsmenge $x \in D$ genau ein Element $y \in Z$ zuweist, heisst **Funktion** oder **Abbildung** . Man schreibt

$$f : D \longrightarrow Z$$

oder elementweise

$$x \in D \mapsto y = f(x) \in Z$$

Die Vorschrift, die jedem Element x 2 D ein y 2 Z zuordnet, heisst Zuordnungsvorschrift oder auch Abbildungsvorschrift f(x) = y.
Man nennt die Ursprungsmenge D auch den **Definitionsbereich** , die **Definitionsmenge** oder die **Urbildmenge** , Z die **Zielmenge** .
Die Untermenge $f(D) = \{f(x) \in Z \mid x \in D\} \subseteq Z$ der durch die Funktion erreichbaren Elemente der Zielmenge bezeichnet man auch als **Wertemenge** , **Bildmenge** , **Bildbereich** oder **Wertebereich** von D bzgl. f .
Elemente $x \in D$ heissen **Urbilder** oder **Argumente** und die Elemente $y = f(x) \in f(D)$ **Bilder** oder **Funktionswerte** .
Gilt $y \in f(D)$ sagt man auch, dass f den Wert y annimmt.
Für eine Teilmenge $A \subseteq D$ heisst $f(A) = \{f(x) \in Z \mid x \in A\} \subseteq Z$ das **Bild** von A bzgl. f .
Für eine Teilmenge $B \subseteq Z$ heisst $A = \{x \in D \mid f(x) \in B\} \subseteq D$ der **Urbildbereich** von B bzgl. f .

Sei $(D,Z,R), R \subseteq D \times Z$ eine Relation zwischen D und Z und (Z,D,R^{-1}) die zugehörige Umkehrrelation.
Dann ist die Umkehrrelation von (Z,D,R^{-1}) wieder gleich der Relation (D,Z,R) , das heisst

$$(D,Z,(R^{-1})^{-1}) = (D,Z,R)$$

DEFINITION

Der Graph einer Funktion

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

DEFINITION

Identität

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

DEFINITION

Surjektivität

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

DEFINITION

Injektivität

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

Die Funktion $id : D \to D$ heisst **Identität** , wenn $id(x) = x$ für alle $x \in D$.	Sei $f :\to Z$ eine Funktion. Dann heisst die Menge $$\{(x, y) \in D \times Z \mid y = f(x)\}$$ der **Graph** von f .
Eine Funktion $f : D \to Z$ heisst **injektive (oder eineindeutige) Funktion** , wenn verschiedene Elemente von D auf verschiedene Elemente von Z abgebildet werden, also für alle $x, x\prime \in D$ gilt: $x \neq x\prime \Rightarrow f(x) \neq f(x\prime)$ oder gleichwertig $f(x) = f(x\prime) \Rightarrow x = x\prime$.	Eine Funktion $f : D \to Z$ heisst **surjektive Funktion** , wenn $f(D) = Z$, also wenn der Wertebereich gleich der Zielmenge ist.

DEFINITION

Bijektivität

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

DEFINITION

Die Umkehrfunktion

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

DEFINITION

Die Komposition

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

SATZ

Assoziativität der Komposition

3 RELATIONEN UND FUNKTIONEN

Ist $f : D \to Z$ eine bijektive Funktion, dann heisst die Abbildung $f^{-1} : Z \to D$ mit $y \mapsto x = f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion** , **Umkehrabbildung** oder **Inverse** von f .

Eine Funktion heisst **bijektiv** , wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Die Komposition von Funktionen ist assoziativ. Für Funktionen $h : D_1 \to Z_1$, $g : D_2 \to Z_2$ und $f : D_3 \to Z_3$ mit $h(D_1) \subseteq D_2$ und $g(D_2) \subseteq D_3$, gilt also

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Seien $g : D_1 \to Z_1$ und $f : D_2 \to Z_2$ zwei Funktionen mit $g(D_1) \subseteq D_2$, so ist die ? **Komposition** $f \circ g$ eine Funktion

$$f \circ g : D_1 \to Z_2 \text{ mit } x \mapsto f(g(x))$$

Satz

Komposition von Funktion und Umkehrfunktion

3 Relationen und Funktionen

Satz

Umkehrfunktion der Komposition

3 Relationen und Funktionen

Seien $f: D_2 \to Z_2$ und $g: D_1 \to Z_1$ bijektive Funktionen mit $Z_1 =_D 2$.
Dann gilt:
$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, d.h. $(f \circ g)^{-1}(z) = (g^{-1} \circ f^{-1})(z)$ für alle $z \in Z_2$.

Sei $f: D \to Z$ eine bijektive Funktion. Dann gilt:
- $f^{-1} \circ f = id$, d.h. $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ für alle $x \in D$.
- $f \circ f^{-1} = id$, d.h. $(f \circ f^{-1})(x) = x$ für alle $x \in D$.