DEFINITION

Menge und Elemente

2 MENGEN

Mengen - Notation

2 MENGEN

DEFINITION

Gleichheit zweier Mengen

2 MENGEN

DEFINITION

Beziehungen zwischen Mengen

2 MENGEN

Mengen können durch Aufzählung aller Elemente beschrieben werden:

$$A = \left\{1, 2, \pi, \frac{1}{4}\right\}, \quad B = \{a, e, i, o, u\}$$

Mengen können auch durch eine Grundmenge und eine Bedingung beschrieben werden. z.B. alle Elemente der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ welche kleiner als 5 und grösser oder gleich 2 sind:

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 < n \leq 5\}$$

Eine **Menge** A ist eine Zusammenfassung von ausgewählten, unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen, so dass stets eindeutig feststellbar ist, ob ein Objekt zu der Menge gehört oder nicht.
Objekte, die zu der Menge gehören, heissen **Elemente** der Menge.
Wenn a ein Element von A ist schreibt man auch $a \in A$
Falls a nicht in A ist schreibt man $a \notin A$

Sind alle Elemente der Menge A auch in der Menge B, ist A eine **Teilmenge** von B und man nennt B eine **Obermenge** von A:

$$\text{Falls } a \in A \Rightarrow a \in B \text{ dann } A \subseteq B \text{ bzw.} B \supseteq A$$

Falls A eine Teilmenge von B ist, aber die beiden Mengen nicht gleich sind, nennt man A eine **echte Teilmenge** (bzw. B eine **echte Obermenge**)

$$\text{Falls } A \subseteq B \text{ aber } A \neq B \text{ dann } A \subset B \text{ bzw.} B \supset A$$

Zwei Mengen A und B heissen **gleich** , kurz $A = B$, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

$$A = B, \text{ wenn } a \in A \Leftrightarrow a \in B$$

SATZ

Gleichheit zweier Mengen aus Teilmengenbeziehung

2 MENGEN

DEFINITION

Mächtigkeit

2 MENGEN

DEFINITION

Die leere Menge

2 MENGEN

DEFINITION

Mengenoperationen

2 MENGEN

Hat eine Menge A endlich viele Elemente, heisst sie **endlich** , andernfalls **unendlich** .
Ist A endlich und enthält genau n verschiedene Elemente, so ist die **Mächtigkeit** von A gleich n . Man schreibt auch $|A| = n$

Gilt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ dann ist $A = B$

Für zwei Mengen A und B gilt:
• $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ oder } a \in B\}$ (**Vereinigung** von A und B)
• $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ und } a \in B\}$ (**Durchschnitt** von A und B)
• $A \setminus B = \{a \mid a \in A \text{ und } a \notin B\}$ (**Differenz** von A und B , auch genannt " A ohne B ")

Die Menge, die kein Element enthält, heisst **leere Menge** und hat das Symbol $\emptyset$ oder $\{\}$.
Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge und $|\{\}| = 0$

Definition

Disjunkte Mengen

2 Mengen

Satz

Mengenoperationen auf Teilmengen

2 Mengen

Definition

Mengen - Komplement

2 Mengen

Satz

Die Mächtigkeit der Vereinigung

2 Mengen

Ist $A \subseteq B$, so gilt

- $A \cup B = B$
- $A \cap B = A$
- $A \setminus B = \{\}$

Gilt $A \cap B = \{\}$, heissen A und B **disjunkt** .

Sind A und B endliche Mengen, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

Ist $A \subseteq B$, heisst $B \setminus A$ **Komplement** von A bezüglich B .
Man schreibt auch $\overline{A}$

Satz

Rechenregeln für Schnitte und Vereinigungen

2 Mengen

Definition

Karthesisches Produkt

2 Mengen

Satz

Die Mächtigkeit des karthesischen Produkts zweier Mengen

2 Mengen

Definition

Punkte und Vektoren

2 Mengen

Das **Karthesische Produkt** zweier Mengen A, B ist die Menge aller möglichen Paare (a, b) sodass $a \in A$ und $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Für $A \times A$ schreibt man auch A^2

Seien A, B und C Mengen, dann gilt
• $A \cap B = B \cap A$ sowie $A \cup B = B \cup A$ (**Kommutativität**)
• $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ sowie $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (**Assoziativität**)
• $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ sowie $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ (**Distributivität**)

Man nennt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

einen **Vektor** oder Punkt.

Sind A und B zwei endliche Mengen, so gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

DEFINITION

Nullpunkt des Rn

2 MENGEN

DEFINITION

Gleichheit zweier Vektoren

2 MENGEN

Vektoraddition und skalare Multiplikation

2 MENGEN

DEFINITION

Der n-dimensionale euklidische Raum

2 MENGEN

Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, heissen **gleich** wenn $x_i = y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Im $\mathbb{R}^n$ ist der Ursprung ein n -Tupel, bei dem jede Komponente 0 ist. Man nennt den Ursprung auch **Nullpunkt** oder **Nullvektor** und schreibt

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Die Menge $\mathbb{R}^n$ versehen mit der komponentenweisen Addition und der skalaren Multiplikation (wie oben beschrieben) wird als n -dimensionaler **euklidischer Raum** bezeichnet.

Das Vielfache eines Vektors $\vec{x}$ ist folgendermassen definiert:

$$\alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_m \end{pmatrix}, \vec{x} \in \mathbb{R}^m, \alpha \in \mathbb{R}$$

Die **Addition** von zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

DEFINITION

Norm eines Vektors

2 MENGEN

DEFINITION

Epsilon-Umgebung

2 MENGEN

SATZ

Dreiecksungleichung

2 MENGEN

DEFINITION

Konvexkombination zweier Punkte

2 MENGEN

Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$. Dann ist

$$U(\vec{x}, \epsilon) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, ||\vec{y} - \vec{x}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} < \epsilon \right\}$$

eine Epsilon-Umgebung (also die Menge aller Punkte, die einen Abstand von weniger als ϵ vom Punkt $\vec{x}$ haben)

Die **Länge** oder **Norm** eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$||\vec{x}|| = \left|\left| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right|\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Für zwei Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist die **Entfernung** zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ definiert als

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1$. Dann heisst

$$\vec{a} = \alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} = \vec{y} + \alpha(\vec{x} - \vec{y})$$

Konvexkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$
Gilt $0 < \alpha < 1$, spricht man auch von einer **echten Konvexkombination** und die Konvexkombination liegt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte $\vec{x}$ und $\vec{y}$

$$\|\vec{x} + \|y\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

DEFINITION

Konvexe Menge

2 MENGEN

SATZ

Schnitt konvexer Mengen

2 MENGEN

DEFINITION

Innere, äussere und Randpunkte

2 MENGEN

DEFINITION

Offene und abgeschlossene Mengen

2 MENGEN

Der Durchschnitt konvexer Mengen ist wieder konvex.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **konvex** wenn $\forall \vec{x}, \vec{y} \in A, \forall \alpha 0 \leq \alpha \leq 1:$

$$\alpha \vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in A$$

Sprich wenn alle Punkte auf der Verbindungslinie zwischen zwei beliebigen Punkte der Menge auch Elemente der Menge sind.

Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **offen** , wenn jedes $\vec{a} \in A$ ein innerer Punkt von A ist.
A heisst **abgeschlossen, wenn $\overline{A}$ offen ist.

Existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U(\vec{a}, \epsilon) \subseteq \overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus A$, dann heisst $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ **äusserer Punkt** von $A \subseteq \mathbb{R}^n$
Existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U(\vec{a}, \epsilon) \subseteq A$, dann heisst $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ **innerer Punkt** von $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Menge aller inneren Punkte von A bezeichnet man als das **Innere** von A .
Ist $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ weder ein innerer noch ein äusserer Punkt von $A \subseteq \mathbb{R}^n$, heisst $\vec{a}$ **Randpunkt** von $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

DEFINITION

Verleich von Vektoren

2 MENGEN

DEFINITION

Beschränkte und kompakte Mengen

2 MENGEN

DEFINITION

Supremum, Infimum, Maximum und Minimum

2 MENGEN

SATZ

Existenz des Supremums und des Infimums

2 MENGEN

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst

- **nach unten beschränkt** , wen es einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ so dass $\vec{x} \geq \vec{b}$ für jedes Element $\vec{x} \in A$ gilt. Man nennt $\vec{b}$ dann auch **untere Schranke** von A .
- **nach oben beschränkt** , wen es einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ so dass $\vec{x} \leq \vec{b}$ für jedes Element $\vec{x} \in A$ gilt. Man nennt $\vec{b}$ dann auch **obere Schranke** von A .
- **beschränkt** , wenn A nach oben und unten beschränkt ist;
- **kompakt** , wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
Man schreibt $\vec{x} \leq \vec{y}$, wenn $x_i \leq y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$
Man schreibt $\vec{x} < \vec{y}$, wenn $x_i < y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$
Das selbe gilt für " $\geq$ " und " $>$ "

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte, nichtleere Menge. Dann existiert das das Supremum und das Infimum von A .

Ist A nach unten beschränkt, heisst die grösste untere Schranke **Infimum** von A . Man schreibt $\inf A$
Gilt $\inf A \in A$, schreibt man $\min A$ (**Minimum** von A)
Ist A nach oben beschränkt, heisst die kleinste obere Schranke **Supremum** von A . Man schreibt $\sup A$
Gilt $\sup A \in A$, schreibt man $\max A$ (**Maximum** von A)

SATZ

Existenz des Maximums und Minimums für endliche Mengen

2 MENGEN

SATZ

Das Maximum und Minimum einer Obermenge

2 MENGEN

Sei $A \subseteq B$ eine Menge.
Existiert das Maximum von A , so ist es kleiner oder gleich dem Maximum von B (sofern dieses existiert).
Existiert das Minimum von A , so ist es grösser oder gleich dem Minimum von B (sofern dieses existiert).

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Menge. Dann existiert ein Maximum und ein Minimum.